Identités remarquables

Elles sont valables sur IR

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$; $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab +$
  $b^2)$
  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

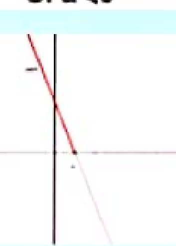
Signe du binôme

- si a>0



x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
ax+b	-	0	+

- Si a<0



x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
ax+b	+	0	-

Résumé :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
ax+b	signe −a	0	signe a

Equations du second degré

Soit a, b et c des nombres réels, a≠0, et $\Delta = b^2 - 4ac$.

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet :

- Si $\Delta \geq 0$, une ou deux solutions réelles :

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Dans ce cas : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Tableau du signe du trinôme : ($Si\ x_1 \leq x_2$)

x	$-\infty$	x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe a	0	signe −a	0	signe a	

- Si $\Delta < 0$, aucune solution réelle.

Tableau du signe du trinôme :

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe a	

Suites arithmétiques

Premier terme u_0 ; raison r ; $u_{n+1} = u_n + r$; $u_n = u_0 + nr$

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n - 0 + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$

$1+2+3+\cdots+n = n \times \frac{1+n}{2}$

Suites géométriques

Premier terme u_0 ; raison q ; $u_{n+1} = qu_n$; $u_n = u_0\, q^n$

Si $q \neq 1$, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n-0+1}}{1-q}$

$1+q+q^2+\cdots+q^n = \sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Si q=1, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times (n+1)$

- **Suites convergentes :** Toute suite croissante (resp.décroissante) et majorée (resp.minorée) est convergente.
- **Théorème des gendarmes**

Soit $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang.

Si $v_n \to l$ et $w_n \to l$, alors $u_n \to l$ $(l \in IR)$

$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
0	+

$+\infty$, alors $u_n \to +\infty$

$-\infty$, alors $u_n \to -\infty$

...natoire

- Factorielle : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$; 0!=1 ; 1!=1
- Nombre d'arrangements sans répétition de p éléments parmi n éléments : $A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$
- Nombre d'arrangement avec répétition de p éléments parmi n éléments : n^p
- Nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

- Cardinal d'un ensemble

A et B sont des parties d'un ensemble Ω

$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$;

$card(\emptyset) = 0$; $card(\overline{A}) = card(\Omega) - card(A)$

Probabilités

- **Expérience aléatoire et probabilités**

* Une situation est dite d'équiprobabilité si toutes les issues ont la même probabilité de se réaliser.

- **Événements et calculs de probabilités**

Soit **Ω** l'univers d'une expérience aléatoire.

* La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le constituent.

* La probabilité d'un événement est comprise entre 0 et 1.

* En situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{nombre\ d'issues\ favorables\ à\ A}{nombre\ total\ d'issues} \qquad p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$$

* Soient A et B deux événements d'une expérience aléatoire

Événement	Notation	Probabilité
événement certain	Ω	p(Ω)=1
Evénement impossible	∅	p(∅)=0
événement contraire de A	$\overline{A}$	$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
Intersection de A et B	A∩B	$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
Réunion de A et B	A∪B	
A et B incompatibles	A∩B=∅	$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

- Probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé

* $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ (avec $p(B) \neq 0$)

* Formule des probabilités composée :

$p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$

* A et B sont indépendants si et seulement si

$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

* Si forment $A_1, A_2, \dots A_n$ une partition de A :

$p(A) = p(A \cap A_1) + p(A \cap A_2) + \cdots p(A \cap A_n)$

$\quad = p_{A_1}(A) \times p(A_1) + p_{A_2}(A) \times p(A_2) + \cdots p_{A_n}(A) \times p(A_n)$

Variables aléatoires disrètes

- Loi de probabilité

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

* Espérance mathématique : $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots p_nx_n$

* Variance : $V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + \cdots + p_n(x_n - E(X))^2$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

* Écart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

- Loi binomiale $\mathcal{B}$ (n; p)

Pour n épreuves indépendantes avec une probabilité de succès p : $p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ pour $k \in \{0 ; 1 ; 2 ; \dots n\}$

$E(X)=np$ et $V(X)=np(1-p)$

Généralités sur les fonctions

- Continuité

- f est continue en $a \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

f continue à droite en $a \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

f continue à gauche en $a \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

- Image d'un intervalle par une fonction continue

f $\nearrow$ sur l'intervalle I (a<b)	f $\searrow$ sur l'intervalle I (a<b)
$f([a;b]) = [f(a);f(b)]$	$f([a;b]) = [f(b);f(a)]$
$f([a;b[) = \left[f(a); \lim_{x \to b^-} f(x)\right[$	$f([a;b[) = \left]\lim_{x \to b^-} f(x); f(a)\right]$
$f(]a;b]) = \left]\lim_{x \to a^+} f(x) ; f(b)\right]$	$f(]a;b]) = \left[f(b); \lim_{x \to a^+} f(x)\right[$
$f(]a;b[) = \left]\lim_{x \to a^+} f(x) ; \lim_{x \to b^-} f(x)\right[$	$f(]a;b[) = \left]\lim_{x \to b^-} f(x) ; \lim_{x \to a^+} f(x)\right[$
$f([a;+\infty[) = \left[f(a); \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[$	$f(]-\infty;a]) = \left[f(a); \lim_{x \to -\infty} f(x)\right[$
$f(]a;+\infty[) = \left]\lim_{x \to a^+} f(x) ; \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[$	$f(]-\infty;a[) = \left]\lim_{x \to a^+} f(x) ; \lim_{x \to -\infty} f(x)\right[$
$f(]-\infty;+\infty[) = \left]\lim_{x \to -\infty} f(x) ; \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[$	$f(]-\infty;+\infty[) = \left]\lim_{x \to +\infty} f(x) ; \lim_{x \to -\infty} f(x)\right[$

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a ; b]$ et soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$

Si f est continue sur $[a;b]$, alors il existe un réel c appartenant à $[a ; b]$ tel que : $f(c)=k$.

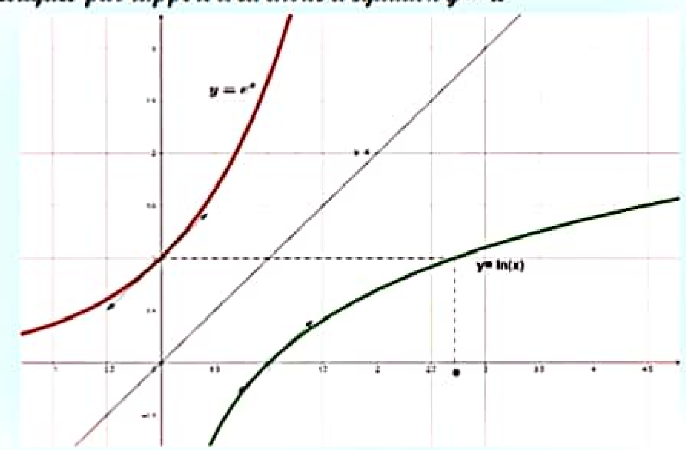
Si f est continue sur $[a;b]$ et si f est strictement monotone sur $[a;b]$, alors il existe un unique réel c appartenant à $[a;b]$ tel que : $f(c)=k$

En particulier, *si f est une fonction continue sur un segment* $[a;b]$ *et si* $f(a)\times f(b)<0$, *alors l'équation* $f(x)=0$ *admet au moins une solution dans l'intervalle* $]a;b[$
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un segment $[a;b]$ *et si* $f(a)\times f(b)<0$ *alors l'équation* $f(x)=0$ *admet une solution unique dans* $]a;b[$

Fonctions continues et strictement monotone sur un intervalle

Si une fonction f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f admet une fonction réciproque notée f^{-1}; f^{-1} *est définie de* $f(I)$ *vers I telle que :*
$(\forall x \in I)\ (\forall y \in f(I))\quad f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$
Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors :

- *Sa fonction réciproque* f^{-1} *est continue sur* $f(I)$ *et de même monotonie que f*
- *Les représentations graphiques de f et* f^{-1} *dans un repère orthonormé, sont symétriques par rapport à la droite d'équation* $y=x$



Limite d'une Suite récurrente convergente

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, et (u_n) *une suite à valeurs dans I.*
Si $u_{n+1}=f(u_n)$, *si* $\lim u_n=l$ *et si f est continue en l, alors* $f(l)=l$ *(l est solution de l'équation* $f(x)=x$*)*

Fonctions usuelles

- Propriétés algébriques

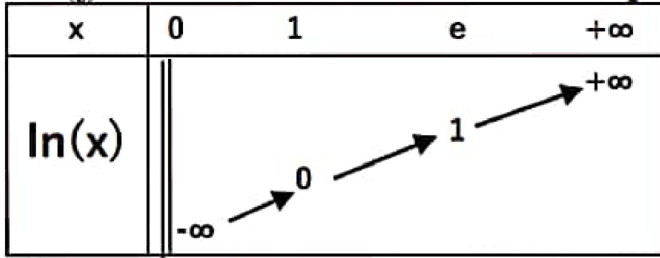
➢ Fonction logarithme népérien :

La fonction logarithme népérien ln est la primitive de la fonction : $x\mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ qui vérifie $ln(1)=0$.

$ln(e)=1$; $e\approx 2,718$

Sur $]0;+\infty[$: $ln(ab)=ln(a)+ln(b)$; $ln\left(\frac{1}{a}\right)=-ln(a)$;

$ln\left(\frac{a}{b}\right)=ln(a)-ln(b)$; $ln(a^n)=n\,ln(a)$; $ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}ln(a)$



x	0	1	e	+∞
ln(x)	‖ −∞ ↗	0 ↗	1 ↗	+∞

$(ln)'(x)=\frac{1}{x}$

➢ Fonction logarithme décimal log :

$log(x)=\frac{ln(x)}{ln(10)}$; $log(1)=0$; $log(10)=1$

Sur $]0;+\infty[$: $log(ab)=log(a)+ln(b)$; $log\left(\frac{1}{a}\right)=-log(a)$

$log\left(\frac{a}{b}\right)=log(a)-log(b)$; $log(a^n)=n\,log(a)$; $log\sqrt{a}=\frac{1}{2}log(a)$

➢ Fonction exponentielle :

$exp=ln^{-1}$; $exp:\begin{matrix} IR\to]0;+\infty[\\ x\mapsto e^x=ln^{-1}(x)\end{matrix}$



(IV)

Si $x \in]0;+\infty[$ et $y \in]0;+\infty[$:

$y = e^x \iff x = \ln y$

$e^0 = 1$; $e^1 = e$; $e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$; $(e^a)^b = e^{ab}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x	0 ↗	1 ↗	e ↗	$+\infty$

$(e^x)' = e^x$

- Fonction exponentielle de base 10

On a : $10^x = e^{x\ln(10)}$

$$10^x = a \iff \ln(10^x) = \ln(a) \iff x\ln(10) = \ln(a) \iff x = \frac{\ln(a)}{\ln(10)}$$

$$10^x = a \iff \log(10^x) = \log(a) \iff x = \log(a)$$

$$10^x > a \iff \ln(10^x) > \ln(a) \iff x\ln(10) > \ln(a) \iff x > \frac{\ln(a)}{\ln(10)}$$

$$10^x > a \iff \log(10^x) > \log(a) \iff x > \log(a)$$

- Limites usuelles des fonctions ln et exp et des suites

➢ Fonctions

comparaison à l'infini	comparaison à l'origine
$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$	$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$	
Croissances comparées à l'infini, n∈IN^*	**Croissances comparées à l'origine, n∈IN^***
$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$	$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$; $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
$\lim_{x\to-\infty} x e^x = 0$; $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

➢ Suites

* si q ∈IN^*, $\lim_{n\to+\infty} n^q = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^q} = 0$

* si q>1, $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ * si -1<q<1, $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

* si q≤-1, q^n n'a pas de limite quand n→+∞

Dérivées et primitives

- Dérivées

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
a $(a \in IR)$	0	$]-\infty;+\infty[$
$x^n, n \in IN^*$	nx^{n-1}	$]-\infty;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$

$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x	$]-\infty;+\infty[$

(V)

- **Opérations sur les dérivées**

$(u+v)'=u'+v'$	$(u^2)'=2u'u$	
$(ku)'=ku'\ (k\epsilon IR)$	$(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	
$(uv)'=u'v+uv'$	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$	
$(u^n)'=nu'u^{n-1}$	$(v\circ u)'=u'\times(v'\circ u)$	
$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$	$(lnu)'=\frac{u'}{u}$	$(e^u)'=u'e^u$

- **Primitives**

La fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I si F est dérivable sur I et ∀ x ∊ I, $F'(x)=f(x)$

u est une fonction dérivable. a, b et c sont des nombres réels. $n\ \in\mathbb{Z}$

$f(x)$	Primitives F	Remarques
a	$ax+c$	
x	$\frac{x^2}{2}+c$	
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$n\neq-1$
$\frac{1}{x}$	$ln\vert x\vert+c$	$x>0\ ou x<0$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$x>0$
$(ax+b)^n$	$\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+c$	$a\neq0\ et\ n\neq-1$
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$	$n\neq-1$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	$u(x)>0$
$\frac{u'}{u}$	$ln\vert u(x)\vert+c$	$u(x)>0\ ou\ u(x)<0$
e^x	e^x	
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b}$	$a\neq0$
$u'e^u$	e^u	

- **Calcul intégral**

➢ **Formules fondamentales**

Si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

Si g (x)= $\int_a^x f(t)dt$, alors $g'(x)=f(x)$; $f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt$

➢ Formule de Chasles : $\int_a^b f(x)dx=\ \int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

$$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$$

➢ Linéarité : α, β ∊ IR. $\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$

➢ Positivité : si $a\leq b\ et\ f\geq0$, alors $\int_b^a f(x)dx$

➢ Intégration d'une inégalité, a ≤b : si $f\leq g$, alors $\int_b^a f(x)dx\leq\ \int_b^a g(x)dx$

Si $m\leq f\leq M$, alors $m(b-a)\leq\int_b^a f(x)dx\ \leq M(b-a)$

➢ Valeur moyenne de f sur $[a;b]$: $\frac{1}{b-a}\int_b^a f(x)dx$

- **Méthode d'intégration par partie pour calculer une intégrale :**

Si u et v sont dérivables sur $[a;b]$ et u' et v' continues sur $[a;b]$, alors :

$$\int_b^a u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_b^a u(x)v'(x)dx$$

(VI)